

Mallas Geométricas, sus Aplicaciones y la Paralelización de Algoritmos de Refinamiento de Mallas

Pedro A. Rodríguez

May 17, 2011

Abstract

Las mallas geométricas son herramientas fundamentales en ingeniería y en la ciencia, en particular en la modelación de fenómenos físicos a través de ecuaciones diferenciales parciales (EDP). Una malla es un conjunto de caras poligonales (cuadriláteros, triángulos o tetraedros) que definen una superficie en el espacio tal que si t_i y t_j son dos elementos de una malla T , entonces: $t_i \cap t_j$ es un vértice común, o una arista común, o una cara común, o el conjunto vacío. Una malla tiene asociada un conjunto de elementos topológicos tales como: vértices, aristas y caras poligonales.

Uno de los primeros algoritmos de generación de mallas fue propuesto por el matemático ruso Boris Nikolaevich Delaunay. Este algoritmo de triangulación se conoce como el “algoritmo o la triangulación de Delaunay” a través del cual se puede obtener, a partir de un conjunto de puntos en el espacio, una triangulación cuyos elementos son lo más equilátero posible.

Para muchos problemas en el campo de la ingeniería y de la ciencia, la triangulación de Delaunay no es suficiente para modelar un problema y resolverlo numéricamente. En muchos casos se necesita insertar nuevos puntos y elementos para mejorar la calidad de la malla, a través de un proceso denominado refinamiento. En aplicaciones complejas del mundo real tales como la resolución de EDP y el modelamiento de objetos muy complejos, se requiere que la malla proporcione una gran aproximación al problema y buena adaptación a la geometría. En la actualidad se conocen varios algoritmos de refinamiento, algunos de ellos, los más usados, serán revisados en la presentación.

Dada una triangulación T de buena calidad y $S \subset T$ un conjunto de triángulos a refinar, previamente seleccionados, el refinamiento de una malla T en 2D o 3D consiste en realizar particiones cada vez más finas de los elementos que pertenecen a S para obtener una malla T_f después de n iteraciones. En cada iteración se revisa la calidad de los elementos obtenidos y los nuevos elementos son agregados a la malla T_i de la iteración i obtenida durante el proceso de refinamiento. La malla T_f obtenida al final del proceso estará compuesta sólo por elementos que son de buena calidad y que cumplen con los requerimientos del problema y/o del método numérico.

La paralelización de los algoritmos de refinamiento de mallas asociados al uso de MEF paralelo y adaptativo es un problema complejo, especialmente el diseño e implementación de algoritmos paralelos para las modernas arquitecturas multicore de memoria compartida y para los sistemas de memoria distribuida que hacen uso del paradigma de paso de mensajes. Se hace necesaria la paralelización de los algoritmos de generación y refinamiento de mallas dado que se requiere procesar mallas de gran tamaño, lo que se hace prácticamente imposible hacerlo con un solo procesador y con memoria limitada.

En los últimos 20 años se han estudiado y diseñado algoritmos paralelos de generación y mejoramiento de mallas geométricas basados en los algoritmos de bisección de elementos o basados en algoritmos de inserción Delaunay. Aquí básicamente revisaremos la paralelización de algoritmos de refinamiento en 2D.

Aunque ya se ha trabajado y se ha avanzado bastante en la solución de problemas que requiere de la generación y mejoramiento de mallas de calidad en 2D, en tres dimensiones aun se encuentra en la etapa de investigación y de diseño de algoritmos eficientes, tanto secuenciales como paralelos, para resolver problemas más complejos.